Επεκτάσεις της σπουδής Γεωμετρικών Τόπων μέσω του Λογισμικού Sketchpad

Ενότητα 5: Σύγχρονες αναζητήσεις στην Μαθηματική Εκπαίδευση.

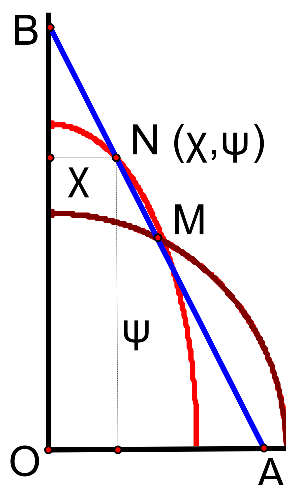
Γιάννης Π. Πλατάρος τηλ. 6947187139 Δ/ση: Καπετάν Κρόμπα 37, 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ , Ηλ.ταχ. plataros@gmail.com

Περίληψη: Η διερεύνηση των γ.τ. μέσω των δυναμικών εργαλείων που προσφέρονται από το λογισμικό Sketchpad, μπορεί να συνδέσει αποτελεσματικά θέματα γραμμικών απεικονίσεων, με την Γραμμική Άλγεβρα, την Αναλυτική Γεωμετρία την Μηχανική και να προαγάγει την πειραματική σκέψη στα Μαθηματικά, κάτι που μπορεί να είναι και ένας μοχλός μελλοντικής επαναφοράς της Ελλάδας στην οικονομική Ανάπτυξη.

Summary: Locus exploration through the dynamic tools offered by Sketchpad software can effectively link linear imagery issues with Linear Algebra, Analytical Geometry, Engineering and promote experimental thinking in mathematics, which can also be a lever of future restoration of Greece to economic development.

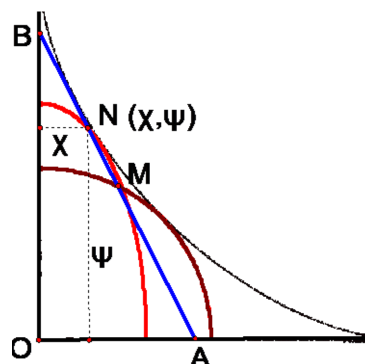
Πρόλογος: Η διδασκαλία των γ.τ. στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, απετέλεσε ένα μείζον διαχρονικό και σπουδαίας σημασίας κομμάτι της διδακτέας ύλης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για πολλές δεκαετίες. Τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες επήλθε υποβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κυρίως λόγω της αποσύνδεσής της από τις Πανελλήνιες εξετάσεις και τον διαχωρισμό του εξαταξίου Γυμνασίου σε τριετές Λύκειο και τριετές υποχρεωτικό Γυμνάσιο. [12] Συνεχίστηκε και με την αποσύνδεση της Αναλυτικής Γεωμετρίας από Πανελλήνιες, ενώ ολοκληρώθηκε προσφάτως και με την απόσυρση της διδασκαλίας των Μιγαδικών που είχαν μια σύνδεση με την έννοια του γ.τ. Το πόσο πολύ έχουν διευρύνει τα όρια της Γεωμετρίας τα δυναμικά Γεωμετρικά λογισμικά, είναι κάτι που δεν είναι πολύ γνωστό στην Ελλάδα, αφού η εξεταστική δομή των

Πανελληνίων εξετάσεων (ή ό,τι κατά καιρούς τις υποκαθιστά) δεν επιτρέπει διαπραγμάτευση θεμάτων με χρήση λογισμικών, οποιουδήποτε είδους. Με αυτή την λογική, χάνεται μια αφανής, αλλά σοβαρή συνιστώσα των Μαθηματικών, η ανακαλυπτική των ιδίων των προτάσεων, μέσω πειραματισμού και ισχυρότατων εικασιών που προσφέρουν τα δυναμικά λογισμικά από τον ίδιο τον σχεδιασμό τους. [1] Στα επόμενα παραδείγματα που θα παρουσιάσουμε, αναδύονται τα προτερήματα των δυναμικών εργαλείων (εδώ του Sketchpad) σε σχέση μόνο με το κεφάλαιο των γ.τ.



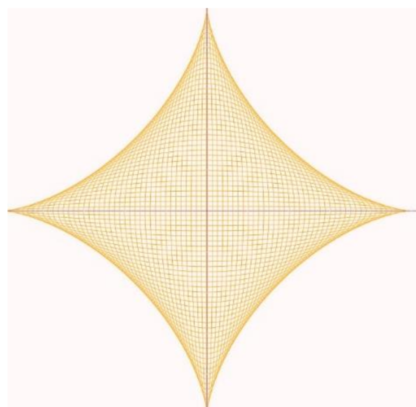
Σχήμα 1: Το μέσον Μ της σκάλας διαγράφει τεταρτοκύκλιο, ενώ το τυχαίο σημείο της Ν, φαίνεται να διαγράφει τέταρτο έλλειψης.

1 . Τα «σταθερά στοιχεία» του γ.τ. , τα οποία πλέον είναι και αυτά μεταβλητά: Ένας αρκετά γνωστός και δημοφιλής γ.τ. αφορά «σκάλα ολισθαίνουσα επί τοίχου» και για την οποία ζητούμενος είναι ο γ.τ. του μέσου της. Επειδή η σταθερού μήκους AB=h σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και επειδή η διάμεσος επί την υποτείνουσα είναι το μισό της υποτείνουσας, έπεται ότι το μέσον της σκάλας, ανήκει σε κύκλο (Ο, $\frac{h}{2}$) του οποίου ένα τεταρτοκύκλιο και μόνον αυτό, είναι τελικά ο ζητούμενος γ.τ. Εδώ υποτίθεται ότι τελειώνει το θέμα, αλλά με το Sketchpad, μόλις αρχίζει: Ποίος είναι ο γ.τ. ενός τυχαίου σημείου της σκάλας πλην του μέσου της καθώς ολισθαίνει στον τοίχο; Εδώ το εργαλείο σχεδιάζει κάτι που μοιάζει με τέταρτο έλλειψης.(Σχήμα 1) Η συνεχής θεώρηση του τόπου από την ειδική περίπτωση του κύκλου σε έλλειψη όπου γίνεται η μετάβαση από ΝΑ=ΝΒ στο ΝΑ≠ΝΒ, επάγει την εικασία ότι και για έλλειψη ομιλούμε και οι ημιάξονες είναι οι ΝΑ , ΝΒ, κάτι που προκύπτει ξέχωρα και από τον δυναμικό χειρισμό του

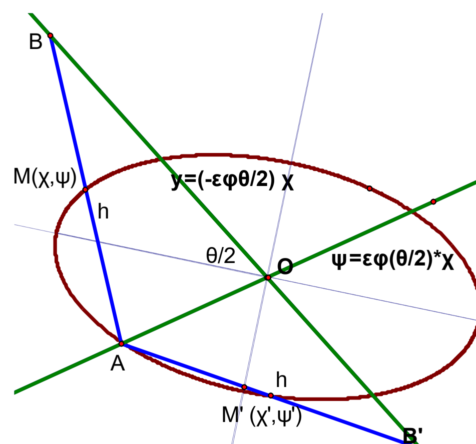


Σχήμα 2: Καθώς το Ν κινείται επί του ΑΒ με το ΑΒ ακίνητο, η παραγόμενη οικογένεια τετάρτων παραβολών, φαίνεται να έχει ως περιβάλλουσα κάποια καμπύλη που μοιάζει με τεταρτοκύκλιο, αλλά τελικά δεν είναι.

σχήματος καθώς Α→Ο είτε Β→Ο . Επομένως έχει ανακαλυφθεί η προς απόδειξη πρόταση για το ότι έχουμε τέταρτο έλλειψης. Πράγματι, αν Ν(χ, ψ) και Ο η αρχή των αξόνων με ΟΑ και ΟΒ οι χχ΄ και ψψ΄ αντιστοίχως, τότε από την ομοιότητα των τριών ορθογωνίων τριγώνων, έχω $\frac{\chi}{\mathrm{BN}}=\frac{\mathrm{OA}}{h}$, $\frac{\psi}{\mathrm{AN}}=\frac{\mathrm{OB}}{h}$, όπου αν υψώσω τις δύο ισότητες στο τετράγωνο και τις προσθέσω κατά μέλη, θα έχω $\frac{\chi^2}{\mathrm{BN}^2}+\frac{\psi^2}{\mathrm{AN}^2}=\frac{\mathrm{OA}^2}{h^2}+\frac{\mathrm{OB}^2}{h^2}=\frac{h^2}{h^2}=1$ δηλ. το Ν ανήκει σε έλλειψη. Και η διερεύνηση των πάλαι ποτέ *«σταθερών στοιχείων»* του γ.τ. συνεχίζεται: Ποίος ο γ.τ. του τέταρτου της έλλειψης; Εδώ το δυναμικό εργαλείο μας βοηθά, καθώς μπορεί να αναπαραστήσει την τροχιά του τέταρτου της έλλειψης, καθώς το Ν κινείται επί του ΑΒ, με το ΑΒ ακίνητο, βλέπουμε να παράγεται μια οικογένεια τετάρτων παραβολών που έχουν μια διαγραφόμενη περιβάλλουσα καμπύλη που μοιάζει με τεταρτοκύκλιο. Αν κρατήσουμε το Ν ακίνητο και σχεδιάσουμε το ίχνος της σκάλας ΑΒ καθώς ολισθαίνει μεταξύ εδάφους και τοίχου, βλέπουμε την ίδια παραγωγή καμπύλης που μοιάζει με τεταρτοκύκλιο. Η βιβλιογραφική αναζήτηση οδηγεί στην καμπύλη «Αστροειδή» η οποία ορίζεται και ως η υποκυκλοειδής κύκλου ακτίνας ρ, εντός του οποίου κυλίεται κύκλος ακτίνας ρ/4 . Εναλλακτικώς ορίζεται και ως περιβάλλουσα των οικογενειών των ελλείψεων, των οποίων οι ημιάξονες έχουν σταθερό άθροισμα , όπως στην δική μας περίπτωση. [2] Αποδείξεις για την εύρεση του τύπου της αστροειδούς δίδονται στο [3] ενώ υπάρχει μια γεωμετρική απόδειξη με ένα



Σχήμα 3: Στο δωρεάν διανομής λογισμικό Graphmatica, η σχεδίαση 40 διαφορετικών ελλείψεων με άθροισμα ημιαξόνων το 1, δίνει το παρακάτω σχήμα όπου διαγράφεται η αστροειδής ως περιβάλλουσα των ελλείψεων.

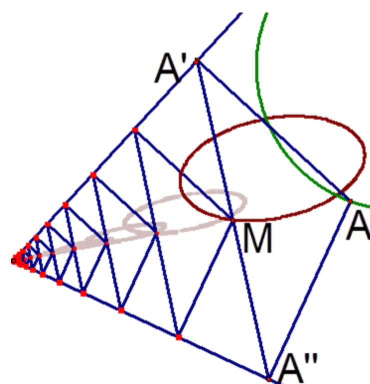


Σχήμα 4:

επιχείρημα διαφορικής φύσεως για το ότι η ΑΒ είναι εφαπτόμενη στην αστροειδή σε συγκεκριμένο σημείο της, στο [4]. Περεταίρω αναζήτηση, δείχνει ότι το πρόβλημα ολισθαίνουσας σκάλας ανήκει σε μια οικογένεια τέτοιων προβλημάτων με ενδιαφέρουσα προβληματική [5] , [6] .Συνεχίζοντας την διερεύνηση των «σταθερών» στοιχείων του τόπου μεταβάλλουμε και την γωνία τοίχου-δαπέδου σε τιμές οξείας και αμβλείας γωνίας, όπου και εκεί βλέπουμε τμήμα παραβολής. Κατασκευαστικά βλέπουμε στην οξεία γωνία να υπάρχουν δύο σκάλες που να αψηφούν τον νόμο της βαρύτητας και να ολισθαίνουν επί των πλευρών της. Με χρήση οριακών θέσεων, εικάζουμε ότι πρόκειται για παραβολή με μεγάλο ημιάξονα $\alpha = \dfrac{h}{2\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}}$ και μικρό $\beta = \dfrac{h}{2\sigma\varphi\dfrac{\theta}{2}}$ Η απόδειξη εκμεταλλεύεται ότι τα Α, Β βρίσκονται στις σταθερές ευθείες $\psi = \varepsilon\varphi\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cdot\chi$ και $\psi = -\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cdot\chi$ αντιστοίχως, ως προς άξονες τις διχοτόμους των παραπληρωματικών γωνιών που είναι κάθετες μεταξύ τους, το ότι d(A,B)=h και τέλος ότι το μέσον

$$\mathrm{M}(\chi,\psi)=\left(\frac{\chi_{\mathrm{A}}+\chi_{\mathrm{B}}}{2},\frac{\psi_{\mathrm{A}}+\psi_{\mathrm{B}}}{2}\right)=\left(\frac{\chi_{\mathrm{A}}+\chi_{\mathrm{B}}}{2},\frac{\chi_{\mathrm{A}}\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-\chi_{\mathrm{B}}\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2}\right)$$

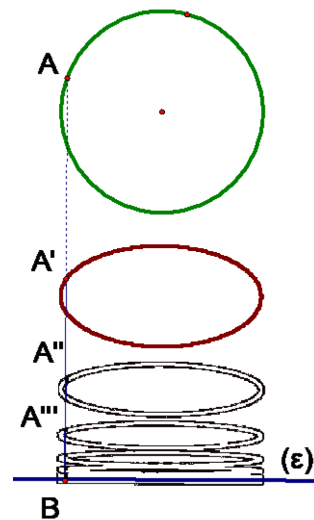
του ΑΒ, ικανοποιεί την γνωστή εξίσωση της παραβολής ως προς την αρχή Ο των αξόνων, την $\dfrac{\chi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$. Φυσιολογικά, η απόδειξη προεκτείνεται κατά γνωστά και όταν το Μ, είναι οποιοδήποτε άλλο σημείο του ΑΒ που το χωρίζει σε σταθερό λόγο.



Σχήμα 5

Ο Γεωμετρικός τόπος του Γεωμετρικού τόπου κ.ο.κ. Μια μεγάλη και γόνιμη μαθηματικώς κλάση γ.τ. είναι οι απεικονίσεις. Σημείο Α, μέσω μιας γεωμετρικής κατασκευής αντιστοιχίζεται σε μοναδικό σημείο Α΄ και στην συνέχεια ζητείται η τροχιά του Α΄, καθώς το Α κινείται σε γνωστό σημειοσύνολο, συνήθως κύκλου ή τμήματός του, ευθείας ή τμήματός της,

αφού αυτά και μόνον αυτά μπορούν να κατασκευαστούν πλήρως με την απαίτηση «με αβαθμολόγητο κανόνα και διαβήτη» και να προσφέρουν και διδακτικώς χρήσιμη εποπτεία. Με τις δυνατότητες επαναληπτικών διαδικασιών που προσφέρει το Sketchpad, μπορεί αφού το σημείο Α απεικονιστεί στο Α΄, στην συνέχεια «με την ίδια διαδικασία» το Α΄ να απεικονιστεί στο Α΄΄ κ.ο.κ. όσες φορές θέλουμε ή όσο επιτρέπει η διακριτική μας οπτική ή οι δυνατότητες του εργαλείου. Στην πραγματικότητα έχουμε το σχήμα $\mathrm{A}\xrightarrow{f} f(A)\xrightarrow{f} f(f(A) \to \ldots \to (f^{\nu})(\mathrm{A})$ δηλ. σύνθεσης απεικόνισης είτε με τον εαυτό της είτε και με μια άλλη μονότιμη διαδικασία g. Ένας τέτοιος χειρισμός των γ.τ. προσφέρει επέκτασης του Γεωμετρικού πλαισίου και επί πλέον αναπαράσταση της έννοιας «συνάρτηση» αφού εκτός από την σύνθεση απεικονίσεων, τίθεται φυσιολογικά και θέμα ύπαρξης σύγκλισης.



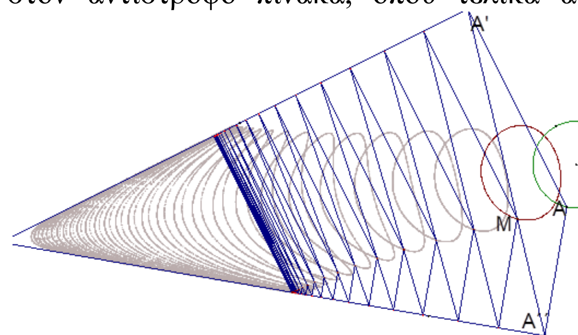
Σχήμα 6.

Παράδειγμα 1: Το σημείο Α, προβάλλεται στο Β της ευθείας (ε) και απεικονίζεται στο μέσον Α΄ της ΑΒ. Το Α΄ στο μέσον Α΄΄ της Α΄Β κ.ο.κ. Αν το Α ανήκει σε κύκλο η εικόνα του είναι έλλειψη η εικόνα της έλλειψης άλλη έλλειψη κ.ο.κ. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την αρχή των αξόνων στο κέντρο του αρχικού κύκλου και Α(χ,ψ) τότε σύμφωνα με την απεικόνιση $\mathrm{A}'\left(\chi, \frac{\psi}{2}\right)$ και αφού για τις συντεταγμένες του Α ισχύει $\chi^2+\psi^2=\rho^2$, τότε $\frac{\chi^2}{\rho^2}+\frac{\psi^2}{\rho^2}=1$ και $\frac{\chi^2}{\rho^2}+\frac{\left(\frac{\psi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}=1$, πράγμα που δηλοί ότι η απεικόνιση του κύκλου, είναι έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα ρ και μικρό ρ/2, που γενικεύεται για κάθε μετέπειτα βήμα ν, σε έλλειψη με μεγάλο άξονα ρ και μικρό $\frac{\rho^{\nu}}{2}$,

όπου καθώς $\nu \to \infty$, $\frac{\rho^{\nu}}{2} \to 0$ και η έλλειψη εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα μήκους 2ρ, όπως και σχηματικά ήδη διαφαίνεται.

Παράδειγμα 2: Σημείο Α εντός οξείας γωνίας προβάλλεται στις πλευρές της γωνίας, Α΄ και Α΄΄ οι προβολές και έστω Μ το μέσον της Α΄Α΄΄. Με την σειρά του το Μ, προβάλλεται στις πλευρές λαμβάνουμε το νέο μέσον του ευθ. τμήματος των προβολών κ.ο.κ. επ΄άπειρον. Ποίος ο γ.τ, του Μ, όταν το Α κινείται σε κύκλο; (Σχήμα 6) Το εργαλείο σχεδιάζει μια ακολουθία κλειστών καμπυλών που μοιάζουν με ελλείψεις και φαίνεται να έχουν μια κάποια σύγκλιση στην κορυφή της γωνίας. Αν θεωρήσω ως αρχή των αξόνων την κορυφή της γωνίας, οριζόντιο άξονα την μια πλευρά της γωνίας και την άλλη πλευρά ως έχουσα κλίση 1 (χωρίς ωστόσο να χάνεται η γενικότητα που επάγεται) αποδεικνύεται εύκολα, ότι αν Α(χ,ψ) τότε

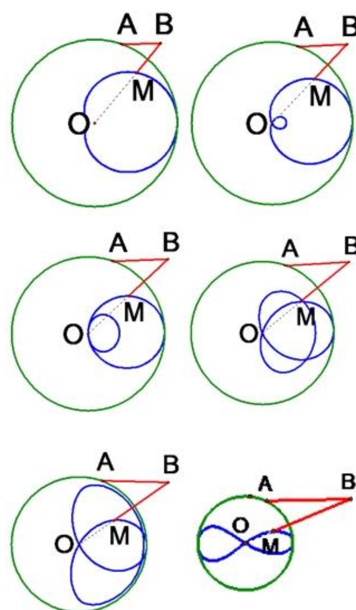
Μ΄(χ΄,ψ΄) και ισχύει (χ,ψ)=$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ (χ΄,ψ΄) έχω δηλαδή μια γραμμική απεικόνιση φ, με γνωστό πίνακα και την ακολουθία $\varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi = \varphi^{\nu}$ που αντιστοιχεί στον πίνακα $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^{\nu}$ όπου και ο ορισμός του πολλαπλασιασμού πινάκων επάγεται από την σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων, η αντίστροφη απεικόνιση φ^{-1} αντιστοιχεί στον αντίστροφο πίνακα, όπου τελικά αν επιλύσουμε ως προς (χ,ψ) και απαιτήσουμε να πληρούν μια εξίσωση κύκλου, λ.χ. $\chi^2 + \psi^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ για τις εικόνες (χ΄, ψ΄) έχουμε την εξίσωση $32\chi'^2 + 10\psi'^2 - 32\chi'\psi' = 1$ που είναι έλλειψη, αλλά για να αποδειχθεί θέλει και κάποιο μετασχηματισμό στροφής ο οποίος μελετάται



Σχήμα 7: Εδώ βλέπουμε μια εικόνα σύγκλισης, όπου οι καμπύλες δεν πλησιάζουν την κορυφής της γωνίας, αλλά έχουμε - κατ΄ αναλογίαν με τον Απειροστικό Λογισμό- ένα είδος ομοιόμορφης σύγκλισης.

πλήρως με θεωρία τετραγωνικών μορφών όπου χρησιμοποιείται μεγάλο κομμάτι βασικής Γραμμικής Άλγεβρας (Ιδιοδιανύσματα, ιδιοτιμές, διαγωνοποίηση) [7] Λίγο να διαφοροποιηθούμε και αντί να αντιστοιχίσουμε το Α στο μέσον του Α΄Α΄΄ , στον πόδα του Α επί την Α΄Α΄΄ έχουμε μια μη γραμμική απεικόνιση και η ακολουθία με έναρξη τον κύκλο μας δίνει μια εικόνα κλειστών καμπυλών σε σχήμα αυτεπίστροφου και μια σύγκλιση όπου οι καμπύλες φαίνονται να πλησιάζουν «οσοδήποτε κοντά» στις πλευρές της γωνίας (Σχήμα 7) και να είναι μια ανάλογη εικόνα που ίσως θα δει πολύ αργότερα ο μαθητής στην ομοιόμορφη σύγκλιση.

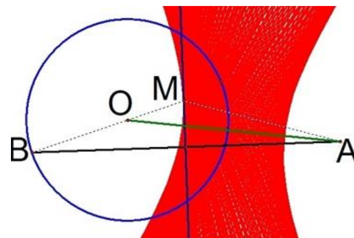
Παράδειγμα 3: Στο επόμενο παράδειγμα (Σχήμα 8) ένα σταθερό κατά μήκος και διεύθυνση ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α κινείται επί κύκλου μοναδιαίας ακτίνας ρ=1. Στην διεύθυνση ΟΒ, λαμβάνουμε τμήμα ΒΜ=ΒΑ. Ζητείται ο γ.τ. του Μ. Το ενδιαφέρον εδώ είναι ότι μόνο ανάλογα του μήκους ΑΒ=α, ο τόπος παίρνει διάφορες διακριτές μορφές και μια ασυνέχεια μετάβασης από την μια μορφή στην άλλη καθώς α→ρ, ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες οδηγούν σε γιγαντιαίο τύπο ενώ οι πολικές στον ασυγκρίτως μικρότερο $\alpha^2+(r+a)^2-2\alpha(r+\alpha)\sigma\upsilon\nu\theta=\rho^2$ αν πάρουμε ως πόλο το κέντρο του κύκλου Ο και αρχή διαγραφής της θ, την σταθερή κατεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$, κατά την ορθή φορά.

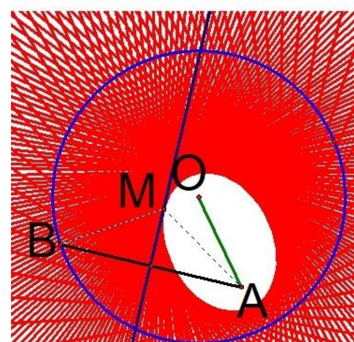


Σχήμα 8

Παράδειγμα 4: Το λογισμικό Sketchpad, σχεδιάζει και τόπους γεωμετρικών αντικειμένων, όπως είδαμε και την κυλιόμενη σκάλα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, αποτελεί το σχήμα 9, όπου το ένα άκρο Α ευθυγράμμου τμήματος, ΑΒ μένει σταθερό ενώ το άλλο κινείται επί κύκλου. Ο γ.τ. της μεσοκαθέτου του ΑΒ, διαγράφει το εξωτερικό μέρος υπερβολής με δύο σκέλη, με εστίες τα Α και Ο και διαφορά αποστάσεων ΟΒ=R=ct ενώ με συνεχή κίνηση του Α προς το Ο , ο τόπος μεταβάλλεται σε έλλειψη κατά την είσοδο του Ο εντός του κύκλου, με συνέχεια στις εστίες και άθροισμα αποστάσεων πάλι ΟΒ=R=ct.

Συμπεράσματα: Από τα προεκτεθέντα είναι φανερό, ότι τα δυναμικά εκπαιδευτικά λογισμικά, όπως το Sketchpad και τα παρόμοιά του (Cabri , Euclidraw, Geogebra, Cinderella :





Σχήμα 9

1) Εμπεριέχουν τεράστιες διερευνητικές δυνατότητες για θέματα γεωμετρικών τόπων και γεωμετρικών απεικονίσεων.

2) Περιέχουν εκ κατασκευαστικής λογικής τον πειραματισμό για την εξαγωγή βάσιμης εικασίας επανακαλυπτική αλλά και γνησίως ανακαλυπτική μάθηση, αφού τα εργαλεία αυτά στέκουν στον αντίποδα της Ευκλείδειας αυστηρής μαθηματικής παράδοσης στην διδασκαλία (=«Αν Α τότε Β») αφού και το Α και το Β είναι κάθε φορά καταλλήλως ανοικτά, περισσότερο ή λιγότερο ενδεχόμενα σε σχέση τον σχεδιασμό του διδάσκοντα, κάτι που δεν είναι πρωτότυπο για τα ίδια τα μαθηματικά , αλλά κάτι που τώρα προσφέρεται λόγω ταχύτητας σχεδιασμού, ακρίβειας σχημάτων, ακρίβειας μετρήσεων και κυρίως δυναμικής συμπεριφοράς, με πρόσβαση στην ολιστική διερεύνηση ενός θέματος. Έτσι, η «ανακαλυπτική μάθηση» του Bruner, μέσω των λογισμικών αυτών, αναγκαστικά θα περιλαμβάνει τον πειραματισμό για εξαγωγή εικασιών, [10] κάτι που γενικώς δεν φαίνεται στα μαθηματικά (όπως στις άλλες Φυσικές Επιστήμες) κατά την φάση της διδασκαλίας τους, αλλά μόνο στην ανακάλυψή τους.[1] Χαρακτηριστικό το παράδειγμα της γνωστής πρότασης *«Τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου»* η δυναμική διερεύνηση της οποίας παράγει άλλες επτά νέες προτάσεις με το ίδιο δυναμικό σχήμα. [8]

3) Οι γ.τ. που εκ της φύσεώς τους υπόκεινται σε κινητική-δυναμική θεώρηση, είναι αποδέκτες των ωφελημάτων της νέας τεχνολογίας και φαίνεται ότι μπορεί να παραχθεί νέα γνώση στον πλέον αρχαίο και διερευνημένο κλάδο των Μαθηματικών, όπως η Ευκλείδεια Γεωμετρία, φυσικά με την νομοτελειακή προαγωγή της σε Αναλυτική όπως καταδεικνύεται συνεχώς μέσα απ΄αυτά τα δυναμικά εργαλεία, αφού στην

θέση του μαθηματικού αντικειμένου «ό,τι μπορεί να κατασκευαστεί πρωτογενώς με κανόνα και διαβήτη» (Ευθεία-τμήμα ευθείας, κύκλος τμήμα κύκλου) τίθεται πλέον το «οποιαδήποτε (συνεχής) γραμμή», στα κατασκευαστικά όρια των λογισμικών.

4) Ο πειραματικός τρόπος εργασίας για την εξαγωγή ισχυρών Γεωμετρικών εικασιών προσιδιάζει με όλους τους βασικούς πειραματικούς τρόπους όλων των Φυσικών και μη επιστημών, όπου ένα μέγεθος που εξαρτάται από διάφορα άλλα, δηλ. δεν είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής, μπορεί να διερευνηθεί με την θεμελιώδη τεχνική της διατήρησης σταθερής τιμής όλων των μεταβλητών πλην μιας που μεταβάλουμε κατάλληλα και λαμβάνουμε πληροφορίες από σχετική διαγραμματική παράσταση για μέγιστα, ελάχιστα ή και εξαγωγή τύπου. [9] Ειδικά για τους γ.τ. είναι γνωστή η εφαρμογή τους και σε μηχανικές εφαρμογές.[11]

5) Η χρήση δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών αν γίνει εκτεταμένα, στοχευμένα, από μικρή ηλικία, με κατάλληλη επιμόρφωση, με αλλαγή διδακτικής νοοτροπίας, με υιοθέτηση και των πειραματικών προσεγγίσεων, με απάλειψη του μοντέλου της σπειροειδούς διδασκαλίας για την Γεωμετρία (που επεβλήθη μέσω της υποχρεωτικότητας του τρίχρονου Γυμνασίου) και με καθιέρωση υποχρεωτικής 14-χρονης Εκπαίδευσης, μπορεί να κάνει την φυσιολογική μετάβαση από Ευκλείδεια , σε Αναλυτική και σύνδεση με την Γραμμική Άλγεβρα, μέσω γραμμικών απεικονίσεων όπως ενδεικτικά διαφωτίσαμε τα πράγματα, μέσω της γόνιμης μαθηματικά οδού των γ. τ. βάζοντας την πειραματική σκέψη εκεί που της πρέπει , δηλ. αδιάσπαστα μαζί με την θεωρητική, μακράν της αποστήθισης κι ίσως-τελικώς- αυτό αποβεί ως ένας σημαντικός μοχλός για μελλοντική, στέρεα, οικονομική ανάπτυξη της Ελλάδας.

Αναφορές:

[1] Πλατάρος, Γ., & Παπαδοπούλου, Α. (2009) *«Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών.»* 1ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία. Βόλος (Διάθεση:15/8/2017) http://www.etpe.gr/custom/pdf/etpe1441.pdf

[2] Wolrfram MathWorld http://mathworld.wolfram.com/Astroid.html

[3] Ιστολόγιο: The lost last lesson (Διάθεση:15/8/2017) http://lostmathlessons.blogspot.gr/2016/01/astroids.html

[4] Ιστοσελίδα: Matematicas Visuales (Διάθεση 15/8/2017) http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/curves/astroid hypocycloid.html

[5]: Ladder Problems http://www.mathematische-basteleien.de/ladder.htm

[6] Kalman Dan *Solving the Ladder Problem on the Back of an Envelope* American University Washington, D.C. 20016 (Διάθεση:15/8/2017) http://dankalman.net/AUhome/pdffiles/ladder_paper_MM.pdf

[7] : ΕΑΠ Διαδικτυακές σημειώσεις μαθήματος *«Μαθηματικά για την Πληροφορική Ι»* (Διάθεση:15/8/2017) http://edu.eap.gr/pli/pli12/shmeiwseis/tetragwnikes_morfes.pdf

[8]: Πλατάρος Ι. (2016) «*Ο νέος τρόπος διδασκαλίας της Γεωμετρίας και τα δυναμικά Γεωμετρικά* Λογισμικά.» Πρακτικά 3ου Συνέδριου «Νέος Παιδαγωγός»- Αθήνα. Διατίθεται: https://www.academia.edu/34176700/77

[9]: Πλατάρος Ι. (2010) «Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση» 2ο Συνέδριο Ημαθίας Διάθεση 15/8/2017 https://www.ekped.gr/praktika10/math/079.pdf

[10] : Σαλωνίτη Αγγελική (2014) : *«Πολυμεσικές εφαρμογές και συνεισφορά τους στην διδασκαλία των Μαθηματικών στην Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευση».* Πτυχιακή Εργασία . Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών ΤΕΙ Ηπείρου.

[11]: Baez John (2012) Rolling Circles and Balls (Part 3) Διάθεση 15/8/2017: http://www.math.ucr.edu/home/baez/rolling/rolling_3.html

[12]: Ιγγλέζου Αθανασία (2014) *«Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα»* Διπλωματική Εργασία . ΕΚΠΑ, Αθήνα. Διατίθεται : http://www.math.uoa.gr/me/dipl/2013-2014/dipl_Igglezou_Athanasia.pdf